

На правах рукописи

*Шевелева*

**Шевелева Татьяна Анатольевна**

**ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОЧЕГО  
ПРОСТРАНСТВА ДВУХ И ТРЕХЗВЕННЫХ ПЛАНАРНЫХ МАНИПУЛЯТОРОВ**

Специальность 2.5.1. Инженерная геометрия и компьютерная графика. Цифровая поддержка  
жизненного цикла изделий

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Омск – 2025

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Омский государственный технический университет».

Научный руководитель:

**Ляшков Алексей Ануфриевич,**

доктор технических наук, доцент, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Омский государственный технический университет», профессор кафедры «Инженерная геометрия и САПР».

Официальные оппоненты:

**Афонин Вячеслав Леонидович,**

доктор технических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, главный научный сотрудник лаборатории управления технологическими процессами и системами, г. Москва;

**Бездитный Андрей Александрович,**

кандидат технических наук, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Мелитопольский государственный университет», доцент кафедры прикладной математики и информационных технологий имени профессора В.М. Найдыша, г. Мелитополь.

Ведущая организация:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)», г. Челябинск.

Защита состоится «15» октября 2025 г. в 14-00 час. на заседании диссертационного совета 24.2.350.05, созданного на базе ФГАОУ ВО «Омский государственный технический университет» по адресу: 644050, г. Омск, пр. Мира, д. 11, Главный корпус, ауд. Г-226.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Омского государственного технического университета и на официальном сайте <http://www.omgtu.ru>.

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2025 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета 24.2.350.05,  
доктор технических наук, доцент

**Л.Г. Варено**

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность исследования.** В различных отраслях техники и строительства широкое применение находят манипуляторы, в частности, в интенсивно развивающейся отрасли современного производства - робототехнике. Помимо применения в промышленности и в повседневной жизни, манипуляторы могут быть полезны и в других областях, включая автономные транспортные средства, медицинское и хирургическое оборудование, спасение при чрезвычайных ситуациях и катастрофах и в решении военных задач.

К одной из основных характеристик, которая записывается в паспорт манипулятора, относится рабочее пространство. Согласно С. Л. Зенкевичу «рабочее пространство (рабочая зона, зона достижимости)» — это «область...в которой может находиться схват». Изучение рабочего пространства выполняется в процессе построения траектории движения манипулятора, а также при решении обратной задачи кинематики.

Несмотря на то, что вопросам изучения рабочего пространства и решения обратной задачи кинематики посвящено значительное количество работ отечественных и зарубежных исследователей: Е. И. Юревича, О. И. Борисова, Y. Cao, A. Aristidou, в большинстве из них используется достаточно сложный математический аппарат, аналитические решения усложняются использованием нелинейных уравнений и обратных матриц (С. Л. Зенкевич, S. Kucuk, A. Aristidou, A. N. Pechev). В заданном положении манипулятора точка центра схвата определяется единственными значениями декартовых координат, но ей соответствуют в общем случае несколько значений каждой обобщенной координаты. Как и в любом нелинейном уравнении, решения неоднозначны, и возможно несколько решений. В этой связи возникают существенные сложности выделения этих координат, особенно при расчете траекторий перемещения звеньев манипулятора. Получаемые результаты не наглядны и требуют дополнительной обработки.

Хотя системы нелинейных уравнений не имеют единственного решения и обычно решаются численными методами, однако в работах В. Л. Афонина для робота-станка РОСТ-300 удалось найти решение, позволяющее вычислить обобщенные координаты как функции параметров, описывающих положение трехгранника в системе координат детали.

S. Kucuk и Z. Bingul описывают аналитическое решение обратной задачи для двухзвенного робота с помощью кватернионов. V. N. Kumar и Sreenivasulu исследуют двух и трехзвенные планарные манипуляторы с использованием программы Python. Однако все результаты требуют дополнительной обработки: решение обратной задачи кинематики манипулятора, в состав которого входят вращающиеся соединения, обычно дает несколько решений. Каждое решение должно проверяться, чтобы определить, приводят ли они рабочий орган в желаемую точку опорной системы координат. Ещё одним недостатком данных исследований является отсутствие визуализации решений.

В последние годы за счет развития и активного внедрения информационных технологий появились принципиально новые подходы в использовании возможностей геометрического моделирования при исследовании рабочего пространства манипуляторов. Одним из первых явилось установление границ рабочего пространства двухзвенного планарного манипулятора С. Л. Зенкевичем, А. А. и А. Е. Кобринскими. Геометрическая модель представляет собой совокупность дуг окружностей, описываемых точкой схвата для заданных границ изменения обобщенных координат. Это следует из того, что рассматриваемые манипуляторы состоят из звеньев, соединенных вращательными сочленениями, а точки сочленения в плоскости описывают окружности. Если декартовы координаты точек границы можно определить по такой модели, то неизвестны значения соответствующих им независимых координат. Значит невозможно при таком подходе решать обратную задачу.

Дальнейшее развитие геометрического и компьютерного моделирования манипуляторов получило в работах В. Е. Турлапова, Ф. Н. Притыкина и его учеников, T. Zar, A. Gupta, K. Tokarz и других исследователей.

A. G. Gudla для исследования рабочего пространства 6R (6-осевого) робота применил геометрические методы, которые использовал для решения прямой задачи кинематики. Но в исследовании не решается обратная задача кинематики.

T. Zar для двухзвенного планарного манипулятора в среде Matlab получены облака точек при решении прямой задачи кинематики. Но использования этих точек для решения обратной задачи кинематики не предлагается.

G. Gupta разработан геометрический подход решения обратной задачи кинематики для манипулятора с тремя степенями свободы. Этот упрощенный графический подход позволяет управлять манипулятором с помощью микроконтроллера Arduino (ATmega2560), так как сложные матричные операции, связанные с определением обратной задачи кинематики, в этом случае не используются.

Еще одно направление исследования рабочего пространства основывается на использовании возможностей современных САД-систем. В предложенных решениях на плоскости строятся облака точек, соответствующих точкам центра схвата, в том числе и контуры кривых, задающие границы рабочего пространства. Так Sara Serweyouns было предложено компьютерное моделирование рабочего пространства двухзвенных планарных манипуляторов с использованием программного обеспечения Matlab. Такие модели, имея определенную наглядность, позволяют визуализировать границы рабочего пространства, а также возможные особенности внутри этих границ. Существенной проблемой этих решений является то, что точки в получаемых моделях имеют параметры положения, но не позволяют определять параметры “формы” – значения независимых координат. Тем более что каждая точка содержит информацию о двух или трех независимых параметрах, а каждый параметр в свою очередь может иметь несколько значений. Все это не позволяет решать обратную задачу кинематики рассматриваемых манипуляторов таким инструментарием.

В работе тополога У. П. Тёрстона даны качественные модели конфигурационных пространств двух и трехзвенных планарных манипуляторов. Им установлено, что конфигурационному пространству двухзвенного манипулятора соответствует двумерный тор, а трехзвенного – трехмерный тор.

В этой связи актуальными являются исследования, направленные на развитие методологии геометрического и компьютерного моделирования рабочего пространства манипуляторов, применительно к их использованию в среде интегрированных систем компьютерной графики. Для этого требуется разработать геометрические модели, включающие геометрические объекты, содержащие информацию как о координатах точек центра схвата, так и о значениях независимых параметров в этих точках. Эти модели будут являться основой для разработки алгоритмического и программного обеспечения компьютерного моделирования рабочего пространства двух и трехзвенных планарных манипуляторов. Такие исследования позволят совершенствовать непосредственно конструкцию манипуляторов, исследовать траектории их перемещения в различных средах и решать обратную задачу кинематики.

**Объектом исследования** являются рабочее пространство и его границы двух и трехзвенных планарных манипуляторов.

**Предмет исследования** – методы геометрического и компьютерного моделирования объектов, соответствующих двух и трехпараметрическим множествам точек центров схвата планарных манипуляторов.

**Целью диссертационного исследования** является разработка и исследование геометрических и компьютерных моделей рабочего пространства двух и трехзвенных планарных манипуляторов, позволяющих в режиме визуализации выполнять решение прямой и обратной задач кинематики, не требующих получения сложных аналитических зависимостей.

Для достижения поставленной цели в диссертации необходимо решить следующие задачи:

1. Выявить геометрические образы, описываемые аналитическими зависимостями, определяющими двух и трехпараметрические множества точек центра схвата двух и трехзвенных планарных манипуляторов при изменении их обобщенных координат.

2. Разработать геометрические и компьютерные модели поверхностей, полученных на основе отображения выявленных из облаков точек центров схвата одно и 2-х параметрических семейств окружностей в плоскости манипуляторов в 3D и 4D-пространство, позволяющие визуализировать рабочие пространства манипуляторов.

3. На основе полученных 3D и 4D-моделей поверхностей разработать и исследовать геометрические и компьютерные модели их дискриминант, а как результат – границ рабочего пространства манипуляторов и траекторий перемещения центров схвата.

4. Разработать алгоритмы и программы создания компьютерных моделей рабочего пространства манипуляторов, а также его границ и реализовать их в автоматизированном режиме.

5. Решить обратную задачу кинематики двух и трехзвенных планарных манипуляторов в режиме визуализации с использованием разработанных геометрических и компьютерных моделей, не требующих получения сложных аналитических зависимостей.

**Научная новизна** состоит в следующем:

1. Предложена методология, позволившая на основе исследования аналитических зависимостей, решающих прямую задачу кинематики двухзвенного манипулятора, установить, что множества точек схвата определяются однопараметрическим семейством конгруэнтных кривых или двухпараметрическим множеством точек замкнутой области плоскости, что дает возможность моделировать рабочее пространство в режиме визуализации средствами САД-систем.

2. Предложена методология, позволившая на основе исследования аналитических зависимостей, решающих прямую задачу кинематики трехзвенного манипулятора, установить, что множества точек схвата определяются двухпараметрическим семейством конгруэнтных кривых или трехпараметрическим множеством точек замкнутой области плоскости, что дает возможность моделировать рабочее пространство в режиме визуализации средствами САД-систем.

3. Получены и исследованы геометрические (2D облака точек и 3D-поверхности) и компьютерные модели рабочего пространства двух и трёхзвенных планарных манипуляторов в среде САД-систем, отличающиеся от существующих методов тем, что позволяют исследовать структуру рабочего пространства наглядно, в автоматизированном режиме, с возможностью получения значений параметров центра схвата.

4. Разработаны и исследованы аналитические и компьютерные модели границ рабочего пространства планарных манипуляторов, отличающиеся от существующих тем, что выполняется определение как границ, так и пустот рабочего пространства в режиме визуализации.

5. Решена обратная задача кинематики для двух и трёхзвенных планарных манипуляторов, что позволяет исследовать и планировать траекторию перемещения центра схвата средствами компьютерной графики без использования сложных аналитических зависимостей.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Разработаны геометрические модели рабочего пространства манипуляторов в зависимости от изменения обобщенных координат, с помощью которых решаются прямая и обратная задачи кинематики. Проведенные исследования границ поверхностей, определяющих рабочее пространство манипулятора, позволили получить новые результаты, которые могут быть использованы для определения формы рабочего пространства и его границ при планировании траектории движения манипулятора.

Практическая значимость работы заключается в применениях теоретических результатов, полученных при моделировании рабочего пространства средствами компьютерной графики, а именно:

- созданы модели новых геометрических объектов – вспомогательных поверхностей, позволяющих решать обратную задачу кинематики;

- разработаны алгоритмы компьютерного моделирования рабочего пространства двух и трехзвенных планарных манипуляторов;
- разработанные алгоритмы моделирования рабочего пространства реализованы в среде современных САПР;
- разработаны программные продукты и зарегистрированы в Федеральном институте промышленной собственности (ФИПС).

Результаты теоретических исследований диссертационной работы рекомендованы к внедрению на предприятии АО «Омсктрансмаш» и внедрены в учебный процесс ОмГТУ.

**Методы исследования.** В работе применяются метод геометрического и компьютерного моделирования рабочего пространства двух- и трёхзвенных планарных манипуляторов, основанный на отображении ортогональным проецированием двумерных поверхностей и трехмерных гиперповерхностей на координатную плоскость (гиперплоскость), а также методы аналитической геометрии плоскости и пространства, методы дифференциальной геометрии плоскости и пространства, теория огибающих, теория особенностей дифференцируемых отображений, методы кинематической геометрии плоскости и пространства. Для реализации разработанных алгоритмов использованы современные САПР, выполняющие полигональное и твердотельное моделирование, и адаптированные для них языки программирования.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1 Геометрические модели рабочего пространства двухзвенного планарного манипулятора как однопараметрические семейства концентрических и эксцентрических окружностей.

2 Геометрическое и компьютерное моделирование рабочего пространства двухзвенных планарных манипуляторов, основанное на отображении ортогональным проецированием разработанных двумерных поверхностей на координатную плоскость манипулятора.

3 Геометрические модели рабочего пространства трехзвенного планарного манипулятора как двухпараметрические семейства эксцентрических и концентрических окружностей.

4 Геометрическое и компьютерное моделирование рабочего пространства трехзвенных планарных манипуляторов, основанное на отображении ортогональным проецированием трехмерных гиперповерхностей на координатную гиперплоскость.

5 Программы построения геометрических и компьютерных моделей рабочего пространства и его границ двух и трехзвенных планарных манипуляторов в среде САД-систем в автоматизированном режиме.

**Степень достоверности и апробация результатов исследования.** Достоверность результатов подтверждается возможностью их визуализации в программных комплексах с использованием предлагаемых геометрических моделей и реализацией на практике предложенных алгоритмов при проектировании двухзвенных и трехзвенных планарных манипуляторов.

Основные результаты диссертационного исследования рассматривались и обсуждались:

- на научных семинарах кафедры «Инженерная геометрия и САПР» ОмГТУ;
- на XIV Международной IEEE научно-технической конференции «Динамика систем, механизмов и машин», 10–12 ноября 2020 года;
- на 33-ей Международной конференции по компьютерной графике и машинному зрению GraphiCon 2023;
- на Международной научно-практической конференции «Междисциплинарные аспекты современной науки: новые подходы и технологии», 9 ноября 2024 года, город Омск;
- на XXIX Всероссийской научно-технической конференции студентов, молодых ученых и специалистов «Новые информационные технологии в научных исследованиях (НИТ-2024)», 27–29 ноября 2024 года, город Рязань;
- на XIII Международной научно-практической конференции «Наука и просвещение: актуальные вопросы, достижения и инновации», 30 ноября 2024 г., город Пенза;
- на Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Научные исследования высшей школы по приоритетным направлениям науки и техники», 4 декабря 2024 г., город Стерлитамак.

**Соответствие паспорту специальности.** Диссертационная работа по своим целям, задачам, содержанию, методам исследования и научной новизне соответствует научной

специальности 2.5.1. «Инженерная геометрия и компьютерная графика. Цифровая поддержка жизненного цикла изделий» по следующим пунктам:

1. Теория изображений и методы ее применения в процессах построения геометрических моделей и определения геометрических параметров объектов, в том числе методами фотограмметрии (Глава 2, 3, приложения).

2. Теория и практика непрерывного и дискретного геометрического моделирования. Конструирование кривых линий, поверхностей и тел по заданным требованиям (Глава 2, 3, приложения).

5. Теория многомерной геометрии и номографии и её использование при геометрическом моделировании (Глава 3).

6. Геометрические основы процессов проектирования, конструирования и технологии производства с применением компьютерных технологий (Глава 2, 3, приложения).

**Личный вклад автора.** Постановка задач исследования и формулирование основных теоретических положений выполнены совместно с научным руководителем [1-4, 5, 8]. Автором лично получены следующие основные научные результаты: разработаны компьютерные модели геометрических образов, моделирующих структуру рабочего пространства манипуляторов и его границ в режиме визуализации [9, 10, 11]; выполнено решение обратной задачи кинематики планарных манипуляторов без использования сложных аналитических зависимостей [4, 5]; разработаны алгоритмы автоматизированного моделирования рабочего пространства [6, 7, 8, 12]; выполнена реализация разработанных алгоритмов в среде САД-системы и проведена апробация на тестовых задачах [13, 14]. Конфликт интересов со всеми соавторами научных работ отсутствует.

**Публикации.** Основные результаты исследований опубликованы в 14 научных работах, 3 из которых опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ по специальности 2.5.1., 1 - в изданиях, входящих в международную реферативную базу данных и систем цитирования Scopus. Получены 2 свидетельства о регистрации электронных ресурсов.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, трех глав с выводами, заключения, списка используемой литературы и приложений. Общий объем составляет 125 страниц, 67 рисунков и 12 рисунков в приложении. Библиографический список включает 118 наименований.

### **Основное содержание работы**

**Во введении** показана актуальность темы исследования, сформулированы цель и задачи исследования, определены выносимые на защиту положения, описаны теоретические аспекты исследования, изложены научная новизна и практическая значимость, приведены сведения об апробации работы, структуре и объеме диссертации.

**В первой главе** анализируются методы исследования рабочего пространства манипуляторов. В главе представлен аналитический обзор отечественных и зарубежных научных материалов, содержащих аспекты современного исследования рабочего пространства манипуляторов и их границ.

Для исследования рабочего пространства манипуляторов используются основные методы: аналитический, численный, геометро-графический и использующий инструментальный компьютерной графики.

Определено, что при исследовании рабочего пространства манипуляторов основной проблемой является решение обратной задачи кинематики, для решения которой наибольшее применение нашел аналитический метод.

Наиболее исследованным является рабочее пространство двухзвенного планарного манипулятора. Из работы С. Л. Зенкевича известно, что границы рабочего пространства представляют собой дуги окружностей. На границах рабочего пространства определяются значения обобщенных координат по известным координатам опорной системы. Дальнейшим развитием исследований рабочего пространства является представление его в виде облака точек.

В последнее время наиболее активно и эффективно выполняется исследование рабочего пространства манипуляторов на основе применения методов геометрического моделирования

средствами компьютерной графики. При исследовании рабочего пространства возникает ряд проблем, которые включают следующие задачи:

- прямая задача кинематики манипулятора средствами компьютерной графики;
- обратная задача кинематики, решаемая в режиме визуализации средствами геометрического и компьютерного моделирования;
- задача исследования границ, внутренних полостей рабочего пространства с использованием современных САД-систем на основе новых геометрических моделей.

Проведенный анализ определил главную составляющую исследования - установление новых геометрических объектов, соответствующих известным аналитическим зависимостям, и на их базе разработка геометрического и компьютерного моделирования рабочего пространства манипулятора и его границы, а также решение обратной задачи кинематики.

Раскрытие исследуемой темы работы предполагает решение комплекса теоретических и практических задач на основе применения современных методов геометрического и компьютерного моделирования.

**Вторая глава** посвящена геометрическому и компьютерному моделированию и исследованию рабочего пространства двухзвенного планарного манипулятора. Расчетная схема двухзвенного планарного манипулятора приведена на рисунке 1, этот манипулятор состоит из двух подвижных звеньев, совершающих вращение вокруг оси Z в плоскости XY. Точка В является центром схвата, углы поворота звеньев  $u$  и  $v$  - обобщенные координаты.

Известно, что рабочее пространство данного манипулятора представляет собой двухпараметрическое множество точек («облако») схвата. При преобразовании аналитических зависимостей, определяющих рабочее пространство манипулятора, были получены два однопараметрических семейства: концентрических и эксцентрических окружностей. По полученным уравнениям этих семейств построены геометрические и компьютерные модели рабочего пространства (рисунок 2).

Полученные результаты, как и известные в литературных источниках, определяют рабочее пространство манипулятора и его границы в плоскости механизма, т. е. в системе координат XY. Однако такие модели, решая прямую задачу кинематики, не позволяют определять значения обобщенных координат, т.е. решать обратную задачу. Ниже предлагается новая трактовка аналитических зависимостей, определяющих рабочее пространство манипулятора, с учетом семейств окружностей, описанных выше и приведенных на рисунке 2.

Предлагается рассматривать семейства окружностей на плоскости (рисунок 2) как проекции окружностей некоторого многообразия из трехмерного пространства. Такой подход используется в работе В. А. Залгаллера. Из определения элементарной поверхности следует, что элементарная поверхность является образом двухпараметрической области на элементарной плоскости. Для получения образа такой поверхности каждую из окружностей семейства (рисунок 2а) смещаем параллельно координатной плоскости XY на величину, пропорциональную параметру  $u$ . Уравнение семейства таких окружностей записывается следующим образом

$$\begin{aligned} x_B &= l_1 \cos(u) + l_2 \cos(u + v), \\ y_B &= l_1 \sin(u) + l_2 \sin(u + v), \\ z_B &= Cu \end{aligned} \quad (1)$$

где  $C$  – некоторая константа.

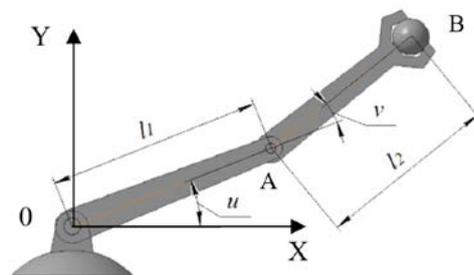


Рисунок 1 – Схема двухзвенного планарного манипулятора

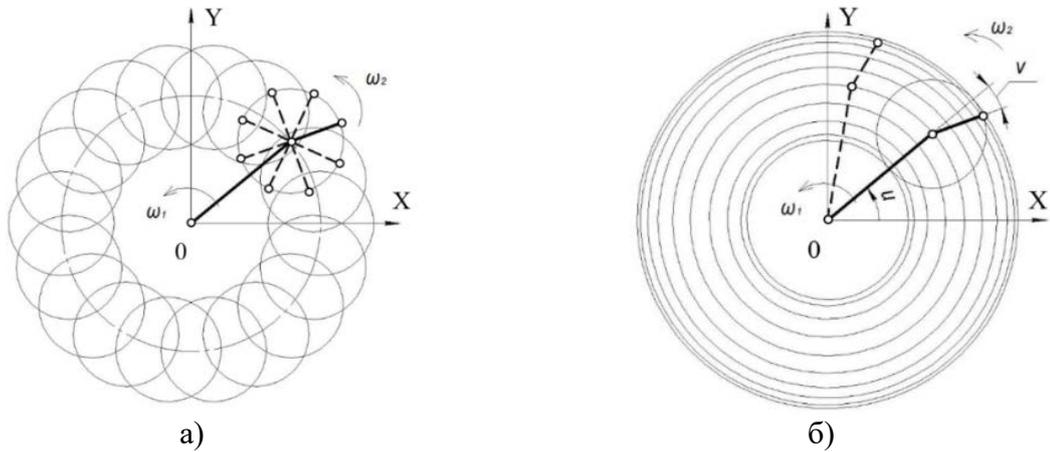


Рисунок 2 – Рабочее пространство двухзвенного планарного манипулятора

Аналогично при ортогональном отображении в пространство  $R^3$  семейства окружностей рисунка 2б, но пропорционально параметру  $v$ , получены уравнения

$$\begin{aligned} x_B &= l_1 \cos(u) + l_2 \cos(u + v), \\ y_B &= l_1 \sin(u) + l_2 \sin(u + v), \\ z_B &= Cv \end{aligned} \tag{2}$$

Полученные поверхности являются графиками отображения семейства линий на плоскости в пространство размерности большей на единицу, чем размерность пространства семейства.

Для исследования рабочего пространства разработаны алгоритмы и программы построения моделей рабочего пространства.

На рисунке 3а изображена каркасная модель трубчатой поверхности, описываемая системой уравнений (1), и названная U-поверхностью. Уравнения (2) определяют циклическую V-поверхность. Её каркасная модель приведена на рисунке 3б. Поверхностные модели U- и V-поверхностей представлены на рисунке 4.

Эти новые объекты используются для решения обратной задачи кинематики манипулятора и нахождения границ рабочего пространства.

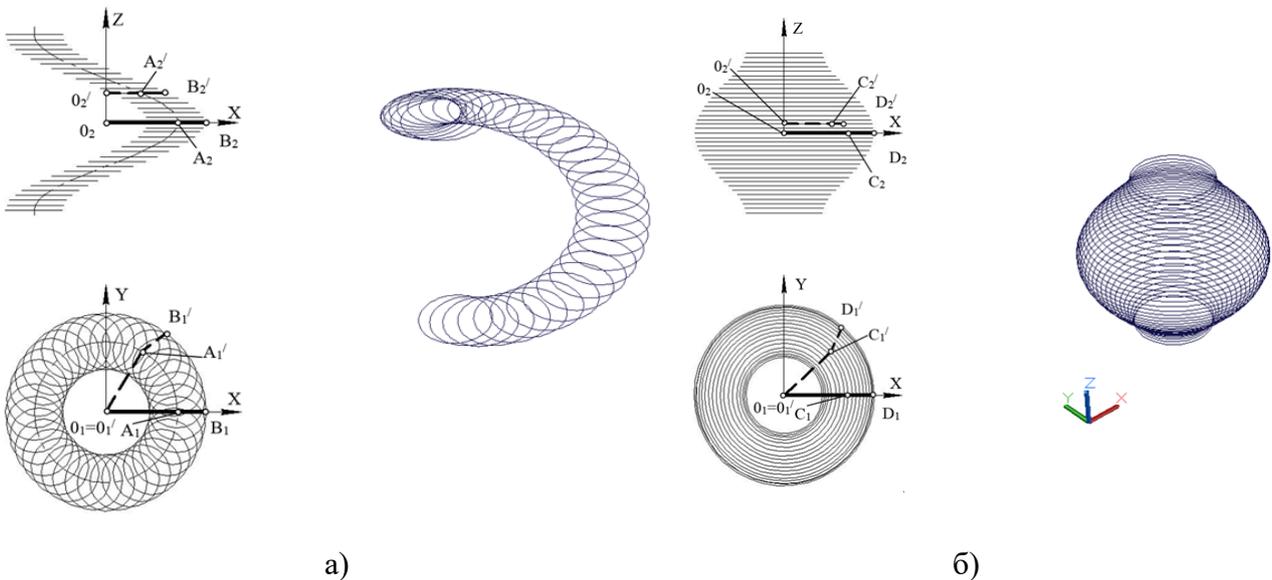


Рисунок 3 – Рабочее пространство двухзвенного планарного манипулятора

Для нахождения границ рабочего пространства исследованы границы U- и V-поверхностей. Известно, что в точках кривизны касательные плоскости к поверхности параллельны координатной оси OZ, что записывается в виде

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

После подстановки частных производных в уравнение (3) и преобразований, находим

$\sin(v) = 0$ , где  $v = \pi n$ ,  $n = -1, 0, 1$ . Полученные значения  $v$  подставляем в системы уравнений (1) и (2), тем самым определяем уравнения кривинант  $U$ - и  $V$ -поверхностей.

Для  $U$ -поверхности при  $v=0^\circ$  кривинантой является цилиндрическая винтовая линия, уравнения которой имеют вид

$$\begin{aligned} x &= (l_1 + l_2) \cos(u), \\ y &= (l_1 + l_2) \sin(u), \\ z &= Cu \end{aligned} \quad (4)$$

В результате, дискриминантой поверхности будет окружность радиуса  $l_1+l_2$ .

При  $v=\pm 180^\circ$  получаем уравнения еще одной винтовой линии

$$\begin{aligned} x &= (l_1 - l_2) \cos(u), \\ y &= (l_1 - l_2) \sin(u), \\ z &= Cu \end{aligned} \quad (5)$$

а её проекцией на координатной плоскости  $XY$  будет окружность радиуса  $l_1-l_2$ .

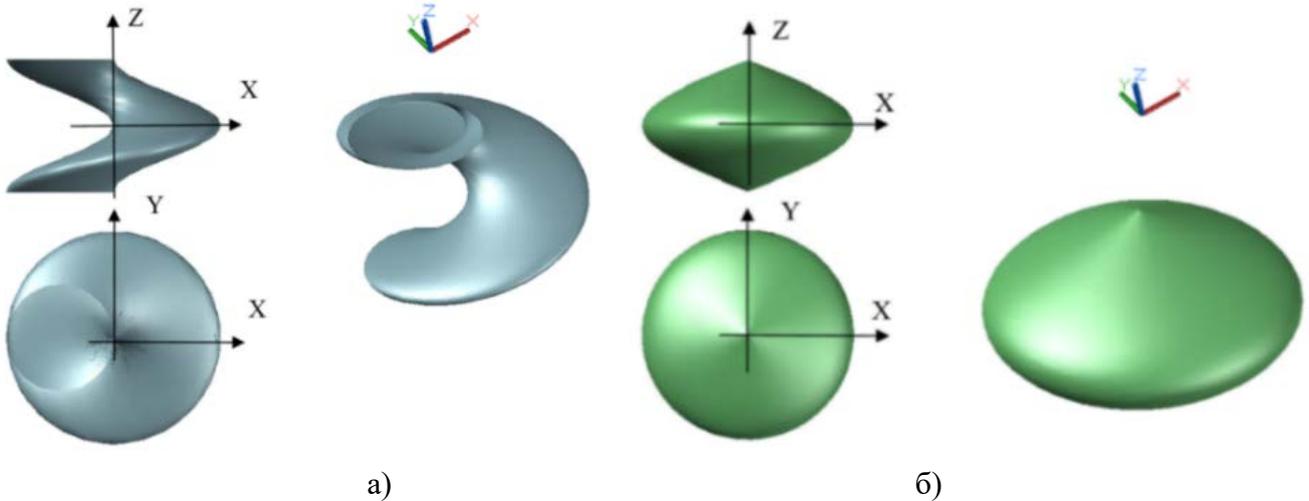


Рисунок 4 - Поверхностные компьютерные модели для  $-180^\circ \leq u \leq 180^\circ$ ,  $-180^\circ \leq v \leq 180^\circ$ : а)  $U$ -поверхности, б)  $V$ -поверхности

Модели  $U$ -поверхности, а также ее кривинанты и дискриминанты, приведены на рисунке 5.

Для  $V$ -поверхности при  $v=0^\circ$  получаем уравнения окружности радиуса  $(l_1+l_2)$

$$\begin{aligned} x &= (l_1 + l_2) \cos(u), \\ y &= (l_1 + l_2) \sin(u), \\ z &= Cv \end{aligned} \quad (6)$$

а для  $v=\pm 180^\circ$  имеем уравнения двух окружностей радиуса  $(l_1 - l_2)$

$$\begin{aligned} x &= (l_1 - l_2) \cos(u), \\ y &= (l_1 - l_2) \sin(u), \\ z &= Cv \end{aligned} \quad (7)$$

Модели  $V$ -поверхности и ее кривинантных линий показаны на рисунке 6.

В промышленных манипуляторах обобщенные координаты изменяются в определенных пределах. В главе построены компьютерные модели рабочего пространства манипулятора для различных диапазонов изменения обобщенных координат.

На рисунке 7 показаны компьютерные модели рабочего пространства манипулятора на  $U$ - и  $V$ -поверхностях.

Рисунки 8 и 9 визуализируют 3D-модели  $U$ - и  $V$ -поверхностей, соответственно, а также границы этих поверхностей. Рабочее пространство ограничено кривинантными линиями поз. 4 и линиями, определяющими границы обобщенных координат поз. 1, 2, 3, 5.

Для решения обратной задачи кинематики на горизонтальной проекции моделей  $U$ - и  $V$ -поверхностей задав положение центра схвата в точке 1 (рисунок 10) с координатами  $(x, y) = (5, -5)$ , получены на  $U$ - и  $V$ -поверхностях третьи координаты  $z(u)=0$ ,  $z(v)=-3.14$ , или  $u=0^\circ$  и  $v=-90^\circ$ .

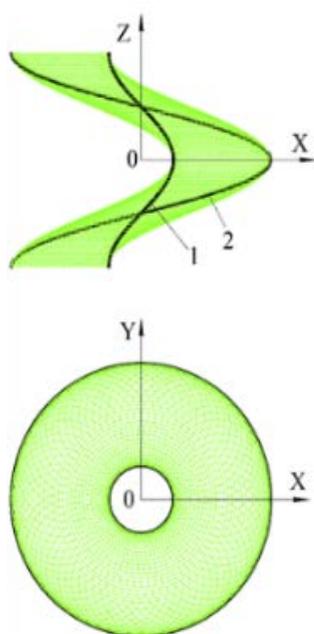


Рисунок 5 - Кривинантные линии на  $U$ -поверхности

1 – винтовая линия при  $v=\pm 180^\circ$ ,  
2 – винтовая линия при  $v=0^\circ$

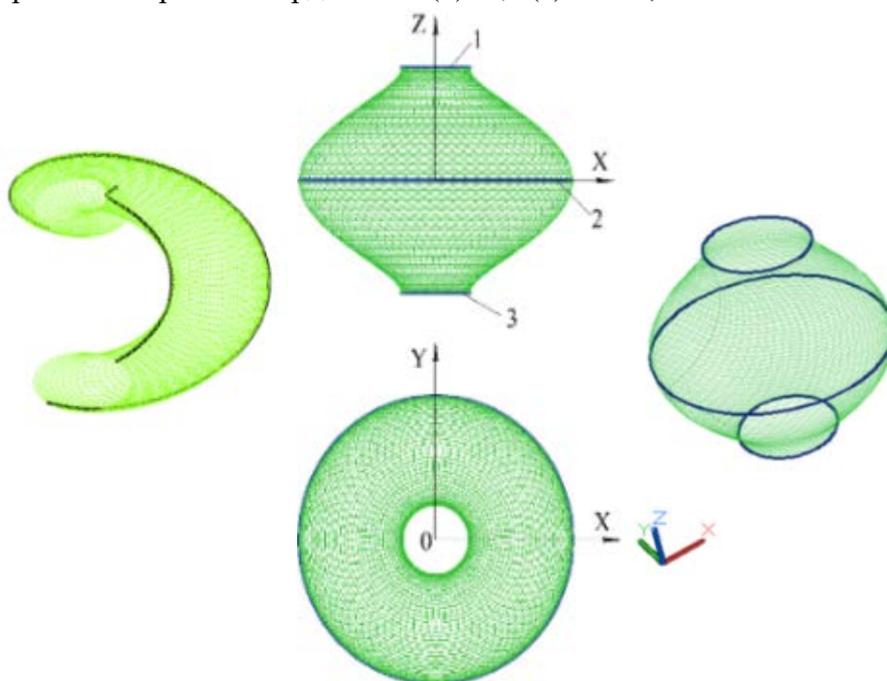


Рисунок 6 - Кривинантные линии на  $V$ -поверхности

1 – окружность при  $v=180^\circ$ , 2 – окружность при  $v=0^\circ$ , 3 – окружность при  $v=-180^\circ$

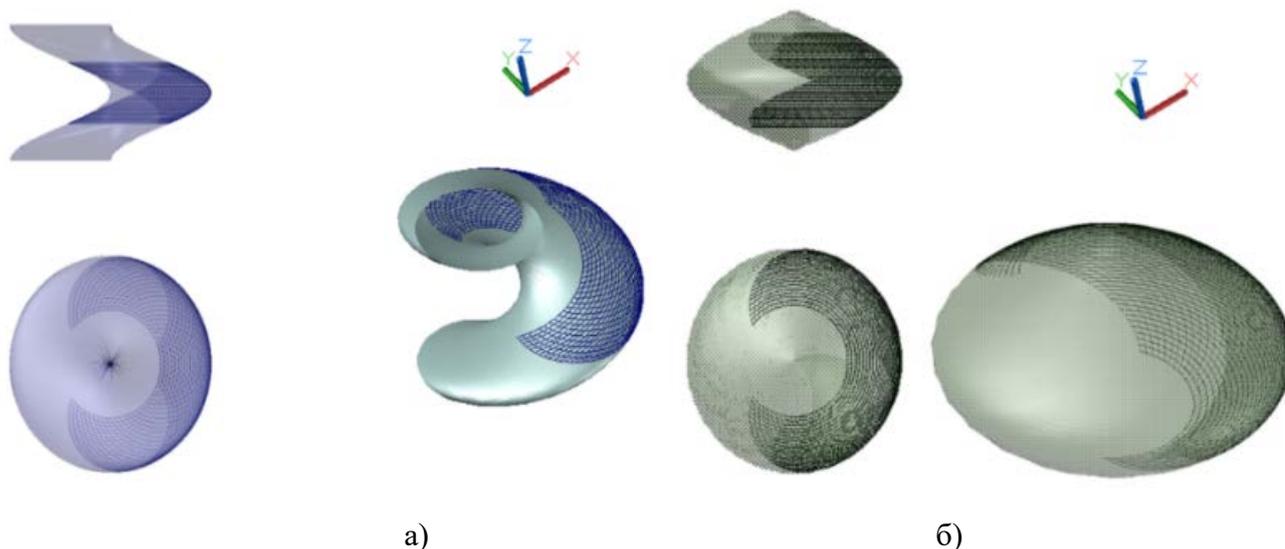


Рисунок 7 - Компьютерные модели  $U$ - и  $V$ -поверхностей и рабочего пространства манипулятора на этих поверхностях

Предлагаемый подход позволяет решать обратную задачу кинематики, т. е. находить обобщенные координаты (углы поворота звеньев) по известным координатам точки в опорной системе, а также определять границы рабочего пространства и пустоты. Для исследования рабочего пространства разработаны алгоритмы построения новых поверхностей, реализованные в САД-системе, по этим алгоритмам созданы программы для построения моделей рабочего пространства.

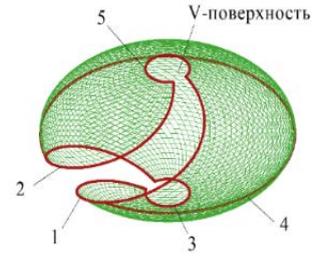
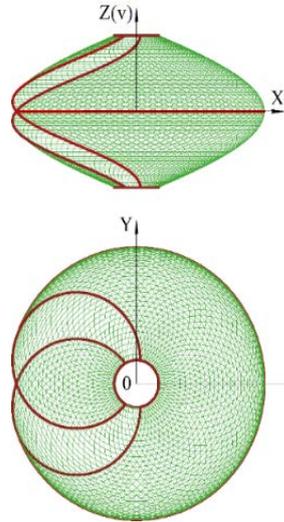
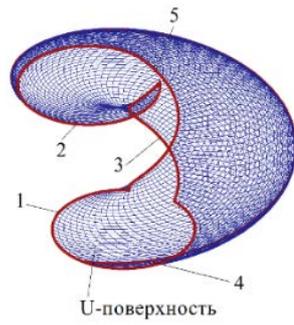
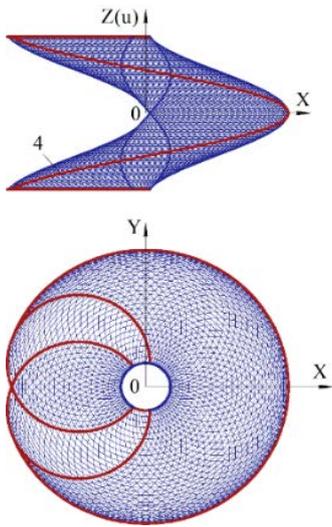


Рисунок 8 – Рабочее пространство манипулятора на  $U$ -поверхности при:  $-160^\circ \leq u \leq 160^\circ$ ,  $-160^\circ \leq v \leq 160^\circ$ ; длины звеньев одинаковые 1-  $u=-160^\circ$ , 2 -  $u=160^\circ$ , 3 -  $v=-160^\circ$ , 4 -  $v=0^\circ$ , 5 -  $v=160^\circ$ ;

Рисунок 9 – Рабочее пространство манипулятора на  $V$ -поверхности при:  $-160^\circ \leq u \leq 160^\circ$ ,  $-160^\circ \leq v \leq 160^\circ$ ; длины звеньев одинаковые 1-  $u=-160^\circ$ , 2 -  $u=160^\circ$ , 3 -  $v=-160^\circ$ , 4 -  $v=0^\circ$ , 5 -  $v=160^\circ$ ;

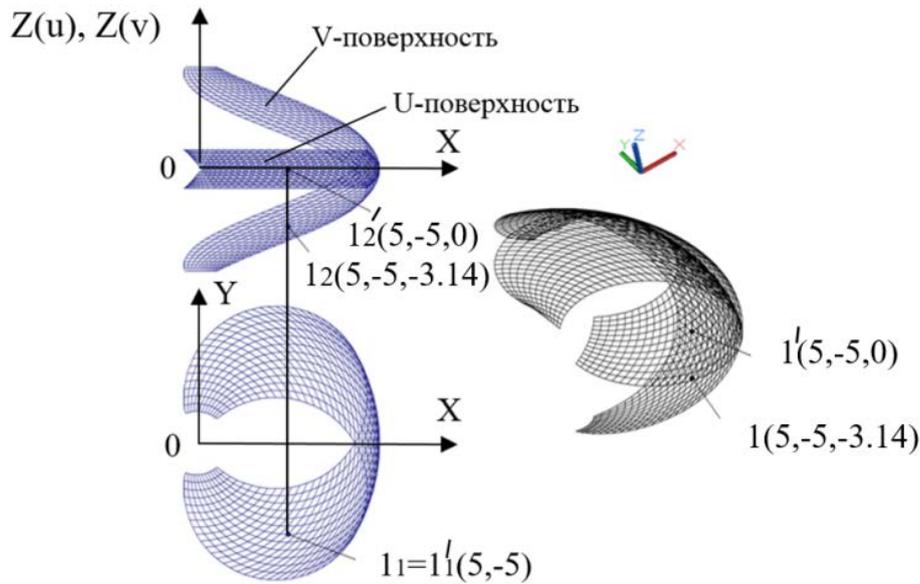


Рисунок 10 – Определение обобщенных координат  $(u, v)$  на  $U$ - и  $V$ -поверхностях

**Третья глава** посвящена геометрическому и компьютерному моделированию и исследованию рабочего пространства трехзвенного планарного манипулятора. Расчетная схема трехзвенного планарного манипулятора приведена на рисунке 11, этот манипулятор состоит из трех подвижных звеньев, совершающих вращение вокруг оси  $Z$  в плоскости  $XU$ . Точка  $C$  является центром схвата, углы поворота звеньев  $u, v, w$  - обобщенные координаты. Известно, что рабочее пространство данного манипулятора представляет собой

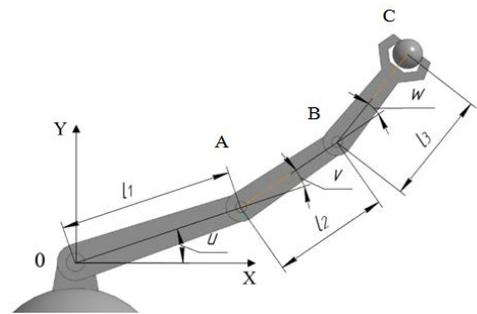


Рисунок 11 – Схема трехзвенного планарного манипулятора

трехпараметрическое множество точек («облако») схвата. При преобразовании аналитических зависимостей, определяющих рабочее пространство трехзвенного планарного манипулятора, получены два двухпараметрических семейства: концентрических и эксцентрических окружностей. По полученным уравнениям этих семейств построены геометрические и компьютерные модели рабочего пространства трехзвенного планарного манипулятора (рисунок 12). На основании анализа полученных моделей и аналитических зависимостей можно сделать вывод, о том, что рабочим пространством трехзвенного манипулятора является трехпараметрическое множество точек. Это множество точек (облако) на плоскости можно изобразить в виде двух дисков, в состав которых входят пределы изменения кольцевых рабочих ячеек. На одном диске эти пределы состоят из двухпараметрического семейства эксцентрических окружностей, а на другом диске – двухпараметрического семейства концентрических окружностей.

Для каждого фиксированного значения  $u$  предлагается рассматривать семейства окружностей на плоскости (рисунок 12а) как проекции окружностей некоторого многообразия из четырехмерного пространства. Для каждого семейства окружностей (рисунок 12а и 12б) найдены аналитические уравнения трехмерных гиперповерхностей.

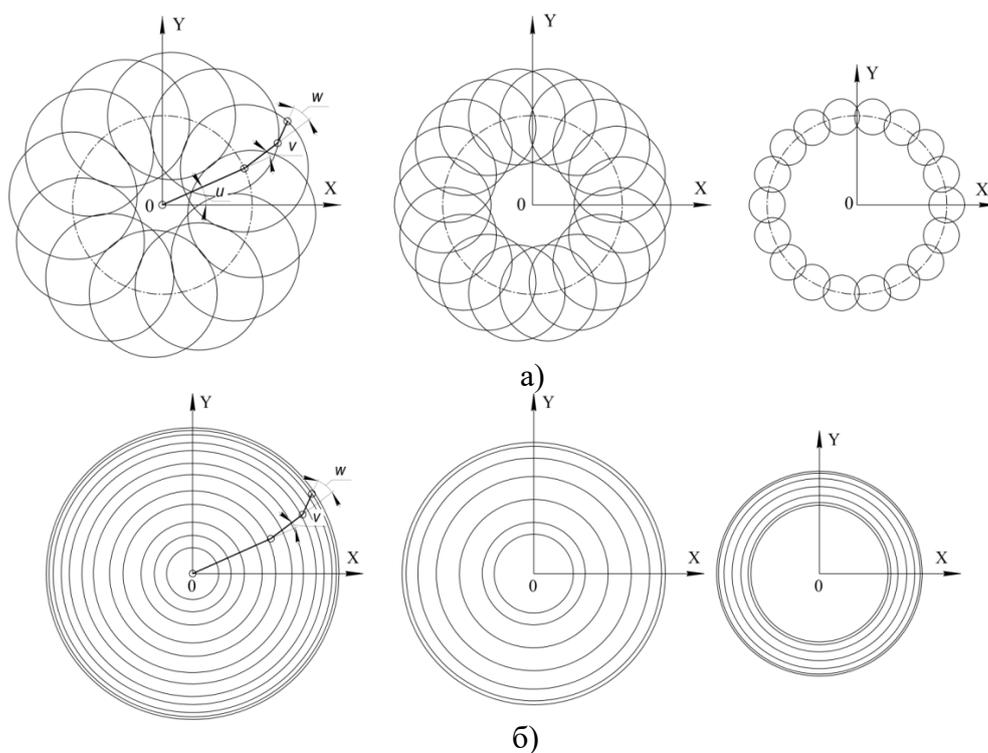


Рисунок 12 – Рабочее пространство трехзвенного планарного манипулятора:

а) семейство эксцентрических окружностей; б) семейство концентрических окружностей

Пусть каждая из окружностей этого семейства смещена параллельно гиперплоскости  $XU$  на величину, пропорциональную параметрам  $v$  и  $u$ . Тогда семейство таких окружностей записывается уравнениями

$$\begin{aligned} x &= x(u, v, w) = l_1 \cdot \cos u + l_2 \cdot \cos(u + v) + l_3 \cdot \cos(u + v + w), \\ y &= y(u, v, w) = l_1 \cdot \sin u + l_2 \cdot \sin(u + v) + l_3 \cdot \sin(u + v + w), \\ z &= C_2 \cdot v, \\ t &= C_1 \cdot u, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – некоторые константы.

Выполнив аналогичное отображение в четырехмерное пространство семейства концентрических окружностей, изображенных на рисунке 12б, но пропорционально параметрам  $w$  и  $u$ , выразим уравнения

$$\begin{aligned}
 x &= x(u, v, w) = l_1 \cdot \cos u + l_2 \cdot \cos(u + v) + l_3 \cdot \cos(u + v + w), \\
 y &= y(u, v, w) = l_1 \cdot \sin u + l_2 \cdot \sin(u + v) + l_3 \cdot \sin(u + v + w), \\
 z &= C_2 \cdot w, \\
 t &= C_1 \cdot u,
 \end{aligned} \tag{9}$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – некоторые константы.

Системы уравнений (8), (9) описывают трехмерные гиперповерхности в четырехмерном пространстве. Одним из вариантов исследования такой гиперповерхности может быть построение её сечений гиперплоскостями.

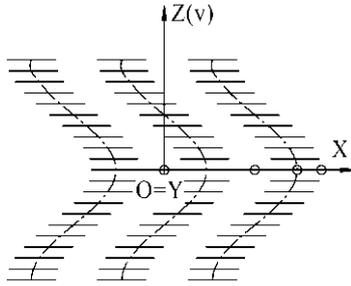


Рисунок 13 – Каркасные модели  
V-поверхностей для  $u=0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$

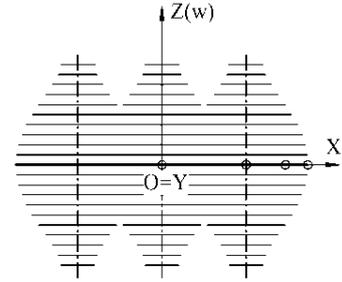


Рисунок 14 – Каркасные модели  
W-поверхностей для  $u=0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$

В качестве примера на рисунке 13 изображены каркасные модели двумерных V-поверхностей, полученных в сечении гиперповерхности (8) гиперплоскостями  $t_i$ . Семейство этих поверхностей является циклическими винтовыми поверхностями. Для гиперповерхности (9) сечения гиперплоскостями  $t_i$  представляют собой циклические поверхности с прямолинейными направляющими. На рисунке 14 представлены каркасные модели таких W-поверхностей.

Полученные системы уравнений (8) и (9) задают гиперповерхности, определяющие рабочее пространство трехзвенного манипулятора. Гиперповерхности являются новыми объектами, используются как вспомогательные гиперповерхности для решения обратной задачи кинематики манипулятора, а также нахождения границ и полостей рабочего пространства. Эти поверхности получены отображением семейств окружностей в пространство  $R^4$ .

Для нахождения границ рабочего пространства отобразим гиперповерхность (8) ортогональным проецированием вдоль оси Z на гиперплоскость XYT. В этом случае в точках дискриминанты гиперповерхности связь обобщенных координат манипулятора определяется зависимостью:

$$F(u, v, w) = \begin{vmatrix} x_u & y_u & t_u \\ x_v & y_v & t_v \\ x_w & y_w & t_w \end{vmatrix} = 0, \tag{10}$$

После подстановки частных производных в уравнение (10) получим:

$$w = 0^\circ \text{ и } w = \pm 180^\circ. \tag{11}$$

Значения параметра  $w$  совместно с уравнениями (8) определяют две двумерные поверхности:

$$\begin{aligned}
 x &= l_1 \cdot \cos u + (l_2 + l_3) \cdot \cos(u + v), \\
 y &= l_1 \cdot \sin u + (l_2 + l_3) \cdot \sin(u + v), \\
 t &= t(u)
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} x &= l_1 \cdot \cos u + (l_2 - l_3) \cdot \cos(u + v), \\ y &= l_1 \cdot \sin u + (l_2 - l_3) \cdot \sin(u + v), \\ t &= t(u) \end{aligned} \quad (13)$$

Эти поверхности задают границы рабочего пространства манипулятора в зависимости от обобщенной координаты  $u$ . Модели разработанных поверхностей определены на рисунках 15.

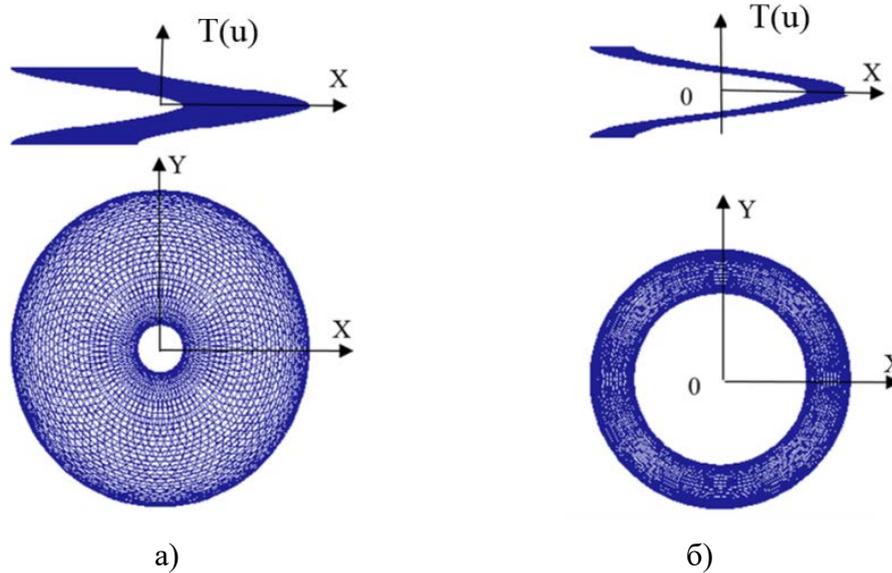


Рисунок 15 - Дискриминантные поверхности: а)  $w=0^\circ$ , б)  $w=\pm 180^\circ$

Для получения границ рабочего пространства в плоскости манипулятора  $XY$ , выполним отображение поверхностей (12) и (13) ортогональным проектированием на координатную плоскость  $XY$ . В точках дискриминант этих поверхностей выполняется условие

$$F(u, v) = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = 0. \quad (14)$$

При подстановке частных производных в уравнение (14) и упрощений, получим в точках дискриминанты значения параметра  $v$ :  $v = 0^\circ$  и  $v = \pm 180^\circ$ . Уравнения (12) и (13) при значениях  $v = 0^\circ$  преобразуются

$$\begin{aligned} x &= (l_1 + l_2 + l_3) \cdot \cos(u), \\ y &= (l_1 + l_2 + l_3) \cdot \sin(u), \\ t &= t(u) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} x &= (l_1 + l_2 - l_3) \cdot \cos(u), \\ y &= (l_1 + l_2 - l_3) \cdot \sin(u), \\ t &= t(u) \end{aligned} \quad (16)$$

а при  $v = \pm 180^\circ$  будут

$$\begin{aligned} x &= (l_1 - l_2 - l_3) \cdot \cos(u), \\ y &= (l_1 - l_2 - l_3) \cdot \sin(u), \\ t &= t(u) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} x &= (l_1 - l_2 + l_3) \cdot \cos(u), \\ y &= (l_1 - l_2 + l_3) \cdot \sin(u), \\ t &= t(u) \end{aligned} \quad (18)$$

В результате уравнения (15) - (18) выражают цилиндрические винтовые линии. Проекциями этих линий на координатную плоскость  $XY$  являются четыре concentric окружности радиусами  $R_{max}=(l_1+l_2+l_3)$ ,  $R_{min}=(l_1-l_2-l_3)$ ,  $R_1=(l_1-l_2+l_3)$ ,  $R_2=(l_1+l_2-l_3)$ . Данные окружности являются участками границы рабочего пространства в зависимости от диапазона изменения параметра  $u$ .

Для нахождения рабочего пространства манипулятора в зависимости от обобщенной координаты  $v$ , отобразим гиперповерхность (8) ее ортогональным проецированием вдоль оси  $T$ . В этом случае получено уравнение, определяющее связь обобщенных координат и имеющее вид

$$v = \pi \cdot k + (-1)^k \cdot \arcsin\left(\frac{l_2}{l_1} \cdot \sin(-w)\right) - w, \quad (19)$$

где  $k=0, \pm 1$ .

Полученное уравнение (19) совместно с уравнениями (8) определяют две двумерные поверхности, модели которых представлены на рисунке 16.

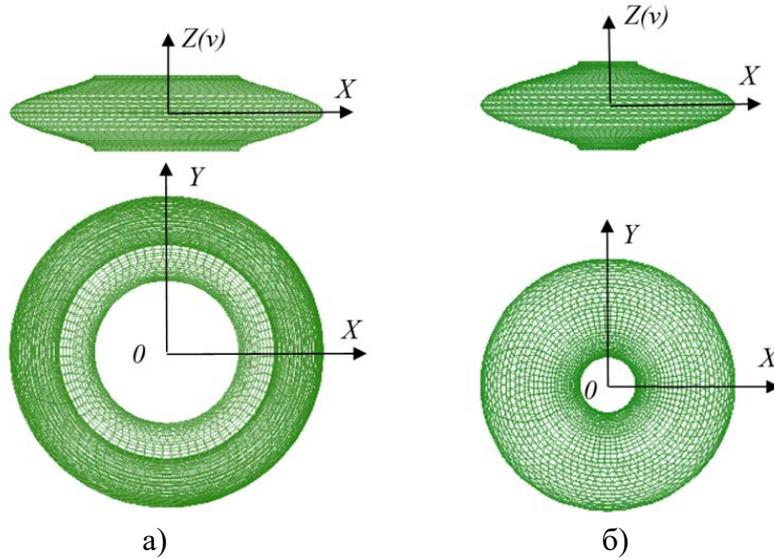


Рисунок 16 – Дискриминантные поверхности: а)  $k=0$ ; б)  $k=\pm 1$

В точках дискриминант этих поверхностей выполняется условие

$$F(u, w) = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_w & y_w \end{vmatrix} = 0, \quad (20)$$

Решением уравнения (20) являются значения  $v$  и  $w$ :  $v = 0^\circ$  и  $w = 0^\circ$ ;

$$v = \pm 180^\circ \text{ и } w = 0^\circ; v = \pm 180^\circ \text{ и } w = \pm 180^\circ; w = \pm 180^\circ \text{ и } v = 0^\circ$$

Подставляя в уравнения (8), получим четыре окружности в плоскостях  $z = z(v)$ .

$$\begin{aligned} x &= (l_1 + l_2 + l_3) \cdot \cos(u), \\ y &= (l_1 + l_2 + l_3) \cdot \sin(u), \\ z &= z(v) = 0^\circ \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} x &= (l_1 + l_2 - l_3) \cdot \cos(u), \\ y &= (l_1 + l_2 - l_3) \cdot \sin(u), \\ z &= z(v) = 0^\circ \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} x &= (l_1 - l_2 - l_3) \cdot \cos(u), \\ y &= (l_1 - l_2 - l_3) \cdot \sin(u), \\ z &= z(v) = \pm 180^\circ \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} x &= (l_1 - l_2 + l_3) \cdot \cos(u), \\ y &= (l_1 - l_2 + l_3) \cdot \sin(u), \\ z &= z(v) = \pm 180^\circ \end{aligned} \quad (24)$$

Гиперповерхность (9), как и (8), задает рабочее пространство трехзвенного планарного манипулятора. Для определения границ этого пространства выполним отображение гиперповерхности (9) ортогональным проецированием вдоль оси  $T$  на гиперплоскость  $XYZ$ .

На рисунке 17 представлены дискриминантные поверхности гиперповерхности (9).

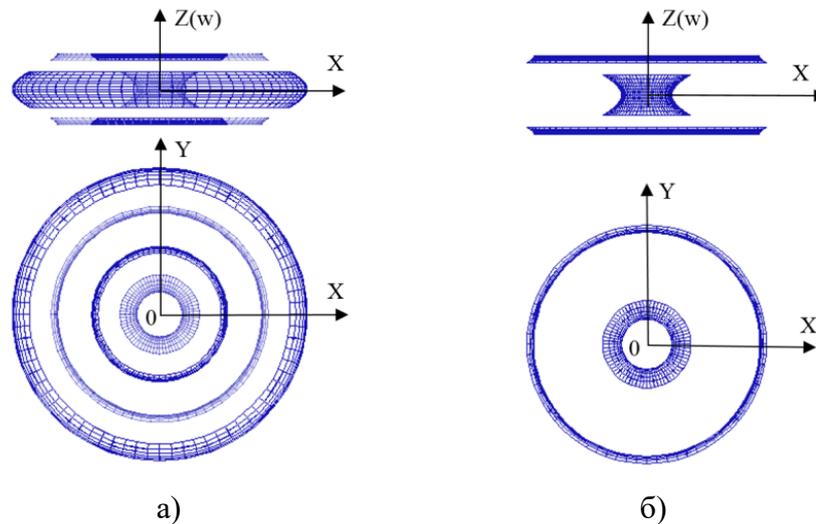


Рисунок 17 – Дискриминантные поверхности: а)  $k=0$ ; б)  $k=\pm 1$

После преобразований получим уравнения четырех окружностей, аналогичные уравнениям для гиперповерхности (8), но для  $z = z(w)$ .

Выполненное отображение гиперповерхности (9) ортогональным проецированием вдоль оси  $Z$  позволило установить, что ее дискриминанта совпадает с дискриминантой гиперповерхности (8).

В главе приведен пример решения обратной задачи кинематики на дискриминантной поверхности.

Разработанная геометрическая интерпретация аналитических зависимостей, описывающих трехпараметрическое семейство точек («облако»), определяющих рабочее пространство планарного трехзвенного манипулятора, позволила получить ряд новых результатов.

На плоскости это множество точек («облако») определяет два диска, включающих пределы кольцевых рабочих ячеек, сформированных из двухпараметрических семейств эксцентрических и концентрических окружностей. Геометрическим образом этих семейств является трехмерный тор.

Отображением разработанных семейств окружностей в четырехмерное пространство найдены два вида гиперповерхностей, являющихся геометрической моделью рабочего пространства манипулятора. Построены сечения этих поверхностей гиперплоскостями. Модели гиперповерхностей и их сечений решают прямую и обратную задачу кинематики планарного трехзвенного манипулятора.

**В приложении** решены 2 практические задачи, результаты которых рекомендованы к внедрению в производство. В 1-й задаче получены аналитическая и геометрическая модели рабочего пространства однозвенного механизма (механизма спецоборудования), представляющая собой кривую – однопараметрическое множество точек.

Во второй задаче на основе алгоритмов и программ главы 2 построена компьютерная модель рабочего пространства крана-манипулятора спецмашины. Рассмотрен пример нахождения обобщенной координаты для данного манипулятора, тем самым решается обратная задача кинематики, позволяющая планировать движение центра схвата по заданной траектории.

Полученные результаты рекомендованы к внедрению в АО «Омсктрансмаш» в виде моделей, алгоритмов и программ проектирования. Предприятием были получены отчёты о проведённых исследованиях, которые будут использованы в его дальнейшей конструкторской деятельности.

### Основные результаты и выводы

В работе решена проблема определения и исследования рабочего пространства двух и трехзвенных планарных манипуляторов на основе разработанных новых геометрических моделей облаков двух и трехпараметрических множеств точек центров схвата и реализованных в

автоматизированном режиме в среде САД-системы. Основные результаты и выводы, полученные при выполнении диссертационной работы, заключаются в следующем:

1 Для исследования рабочего пространства планарных манипуляторов предложена геометрическая трактовка аналитических зависимостей, определяющих решение прямой задачи кинематики этих манипуляторов, отличающаяся от известных тем, что на ее основе получены геометрические образы – семейства конгруэнтных линий, а также двумерные и трехмерные поверхности, соответствующие двух и трехпараметрическим множествам точек, определяющим положение центров схвата манипулятора. Выявленные элементы явились основой для геометрического и компьютерного моделирования рабочего пространства и его границ.

2 Разработаны геометрические и компьютерные модели рабочего пространства двух и трехзвенных планарных манипуляторов: геометрической моделью рабочего пространства двухзвенного планарного манипулятора являются однопараметрические семейства концентрических и эксцентрических окружностей; трехзвенного планарного манипулятора – двухпараметрическое семейство эксцентрических и концентрических окружностей. Эти модели позволяют исследовать структуру рабочего пространства и его границ в режиме визуализации с возможностью получения значений параметров центра схвата.

3 Выполнено отображение ортогональным проецированием семейств окружностей на плоскости в 3D и 4D-пространство. В результате получено: для двухзвенного планарного манипулятора – две двумерные поверхности; для трехзвенного планарного манипулятора – гиперповерхности. Сечениями гиперповерхности гиперплоскостями являются винтовые поверхности и поверхности вращения.

4 Проведено моделирование и исследование разработанных поверхностей (гиперповерхностей). Полученные результаты, позволяют решать обратную задачу кинематики, а также планировать маршрут движения центра схвата по заданной траектории средствами САД-систем в режиме визуализации без использования сложных аналитических зависимостей.

5 Установлены аналитические зависимости, определяющие границы рабочего пространства двух и трехзвенных планарных манипуляторов пространства. Они являются дискриминантами поверхностей (гиперповерхностей) при их проецировании на координатную плоскость (гиперплоскость). На основе этих аналитических зависимостей построены компьютерные модели границ рабочего манипуляторов.

6 Разработаны алгоритмы компьютерного моделирования рабочего пространства двух и трехзвенных планарных манипуляторов. Выполнена реализация разработанных алгоритмов в среде САД-системы и проведена апробация на тестовых задачах. Полученные результаты показывают их достоверность и эффективность.

7 Результаты теоретических исследований диссертационной работы рекомендованы к внедрению на предприятии АО «Омсктрансаш» и внедрены в учебный процесс ОмГТУ.

Практическая полезность разработанных моделей, алгоритмов и программ показана на примерах.

Проведенные исследования показали, что геометрическое моделирование в комплексе с компьютерным моделированием дают широкие возможности при планировании траектории движения манипулятора, а также позволяют определять форму рабочего пространства, его границы, наличия пустот и полостей.

Дальнейшее развитие предложенных в работе подходов и инструментов может быть направлено на моделирование рабочего пространства и его границ планарных манипуляторов большей размерности.

## **ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ**

*Статьи, опубликованные в изданиях, рекомендованных ВАК по специальности 2.5.1:*

1 Ляшков, А. А. Анализ рабочего пространства двухзвенного планарного манипулятора / А. А. Ляшков, Т. А. Шевелева // Вестник компьютерных и информационных технологий. – 2024. – Т. 21, № 1. – С. 22–30.

2 **Шевелева, Т. А.** Моделирование рабочего пространства планарного трёхзвенного манипулятора / **Т. А. Шевелева, А. А. Ляшков** // *Онтология проектирования*. – 2024. – Т.14, № 1(51). – С.71–81.

3 **Шевелева, Т. А.** Моделирование границ рабочего пространства планарного трёхзвенного манипулятора / **Т. А. Шевелева, А. А. Ляшков** // *Омский научный вестник*. – 2024.– № 3(191). – С. 73–81.

*Статьи, опубликованные в изданиях, рекомендованных ВАК:*

4 Ляшков, А. А. Моделирование рабочего пространства планарного двухзвенного манипулятора средствами компьютерной графики/ **А. А. Ляшков, Т. А. Шевелева**. – DOI: 10.25728/avtprom.2023.12.08 // *Автоматизация в промышленности*. – 2023. – № 12. – С. 46–50.

*Статьи, опубликованные в научных изданиях, индексируемые в базе SCOPUS:*

5 Lyashkov, A. A. Geometric Modeling in the Problems of Lever Mechanism Kinematics Research / **А. А. Lyashkov, Т. А. Sheveleva** // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2021. – Vol. 1791. – P. 1–6.

*Статьи в научных журналах, сборниках научных трудов и конференций:*

6 **Шевелева, Т. А.** Программные и инструментальные средства для компьютерного моделирования кинематики механизмов / **Т. А. Шевелева** // *Прикладная математика и фундаментальная информатика*. – 2020. – Том 7. – № 2. – С. 36–47.

7 Ляшков, А. А. Геометрическое моделирование в задачах исследования кинематики рычажных механизмов / **А. А. Ляшков, Т. А. Шевелева** // *Динамика систем, механизмов и машин*. – 2020. – Т. 8. – № 1. – С. 171–185.

8 **Шевелева, Т. А.** Автоматизированное моделирование рабочего пространства плоского двухзвенного манипулятора / **Т. А. Шевелева, А. А. Ляшков** // *ГрафиКон 2023: 33-я Международная конференция по компьютерной графике и машинному зрению (Москва, 20 сент. 2023 г.)*. – М.: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2023. – С. 859-867.

9 **Шевелева, Т. А.** Моделирование границ рабочего пространства двухзвенного планарного манипулятора средствами компьютерной графики / **Т. А. Шевелева** // *Новые информационные технологии в научных исследованиях: материалы XXIX Всероссийской научно-технической конференции студентов, молодых ученых и специалистов (Рязань, 28 ноября 2024 г.)*. – Рязань: ИП Коняхин А.В. – 2024. – С. 116–117.

10 **Шевелева, Т. А.** Исследование границ рабочего пространства трехзвенного планарного манипулятора / **Т. А. Шевелева** // *Наука и просвещение: актуальные вопросы, достижения и инновации: сборник статей XIII Международной научно-практической конференции (Пенза, 30 ноября 2024 г.)*. – Пенза: МЦНС «Наука и Просвещение». – 2024. – С. 46–49.

11 **Шевелева, Т. А.** Геометрическое и компьютерное моделирование перемещения центра схвата двухзвенного планарного манипулятора по заданной траектории / **Т. А. Шевелева** // *Междисциплинарные аспекты современной науки: новые подходы и технологии: Сборник статей по итогам Международной научно-практической конференции (Омск, 09 ноября 2024 г.)*. – Стерлитамак: АМИ, 2024. – С. 198–202.

12 **Шевелева, Т. А.** Автоматизированное моделирование рабочего пространства планарного трехзвенного манипулятора / **Т. А. Шевелева** // *Научные исследования высшей школы по приоритетным направлениям науки и техники: Сборник статей по итогам Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (Стерлитамак, 04 декабря 2024 г.)*. – Стерлитамак: АМИ, 2024. – С. 183–187.

*Свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ:*

13 Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022662077 Российская Федерация. Программа компьютерного моделирования рабочего пространства плоского двухзвенного механизма : № 2022660836 : заявл. 10.06.2022 : опубл. (зарег.) 29.06.2022/ **А. А. Ляшков, Т. А. Шевелева** ; заявитель Ом. гос. техн. ун-т. – 1 с.

14 Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022685586 Российская Федерация. Программа компьютерного моделирования трехмерной гиперповерхности, являющейся моделью рабочего пространства плоского трёхзвенного механизма : № 2022684952 : заявл. 16.12.2022 : опубл. (зарег.) 26.12.2022 / **А. А. Ляшков, Т. А. Шевелева** ; заявитель Ом. гос. техн. ун-т. –1 с.

Печатается в авторской редакции.  
Подписано в печать 09.07.2025. Формат 60×841/16. Бумага офсетная.  
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. 1,25. Уч.-изд. л. 1,25.  
Тираж 100 экз. Заказ 309.

---

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр. Мира д. 11; т. 23-02-12.